מתמטיקה א לכלכלנים

פרק 5 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות **1-2** בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"[1] שלהן, ושרטטו את גרף הפונקציה:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 2 \\ 5-x & x>2 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x & x\ge 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$

3) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} 1/x & x\le 1 \\ |x-2| & 1<x<2 \\ 1 & x=2 \\ x-2 & x>2 \end{cases}$.

א. בדקו את רציפות הפונקציה בנקודות התפר שלה.

ב. עבור כל נקודת אי רציפות, קבעו מאיזה סוג היא.

בשאלות **4-7**, מה צריך להיות הערך הקבוע של k, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x:

4) $f(x)=\begin{cases} kx^2+x-2 & x\le 2 \\ 5kx-6 & x>2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & x\ne 1 \\ k & x=1 \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x\ne 2 \\ k & x=2 \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} 2x-k & x\le 0 \\ x^{2x} & x>0 \end{cases}$

הערה: שאלה **7** ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.

[1] נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות **8-10**, מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b,
על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

8)
$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}+x^2 & x<-1 \\ bx^2+x-1 & -1\le x\le 1 \\ 4\dfrac{\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x>1 \end{cases}$$

9)
$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ (x-1)\ln(x+1)+b & 0\le x\le 1 \\ a\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+4} & x<0 \end{cases}$$

10)
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x<1 \\ ax^2+b & 1\le x\le 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x>2 \end{cases}$$

הערה: שאלות 9-10 ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.

11) הוכיחו או הפריכו:
א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

12) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה.
האם $f+g$ רציפה? הוכיחו זאת.

13) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=x-\frac{1}{2}\lfloor 2x\rfloor$.

הוכיחו או הפריכו :

א. הפונקציה f חסומה לכל x .

ב. הפונקציה f רציפה לכל x .

ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .

ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

14) תהי $f(x)=\begin{cases}|x|-1 & |x+1|\geq 4\\ 2 & |x+1|<4\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x)=x+\frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x .

האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

15) תהי f פונקציה חסומה בקטע $\left(0,1\right)$.

תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $\left(0,2\right)$, על ידי $g\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x\right) & 0<x<1\\ x^{2} & 1\leq x<2\end{cases}$.

א. האם יתכן שהנקודה $x_0=1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמקו.

ב. האם g חסומה בקטע $\left(0,2\right)$? נמקו.

תשובות סופיות

1) רציפה.

2) רציפה.

3) א. רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.   ב. סליקה.

4) $k=1$

5) $k=4$

6) $k=\frac{2}{3}$

7) $k=-1$

8) $a=1\ ,\ b=2$ או $a=2\ ,\ b=1$.

9) $a=-2e^{-1}\ ,\ b=e^{-1}$

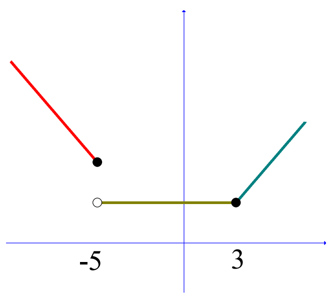
10) $a=\frac{e}{3}\ ,\ b=-\frac{e}{3}$

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) א. טענה נכונה.   ב. טענה לא נכונה.   ג. טענה לא נכונה.   ד. טענה לא נכונה.

14) א.



ב. הפונקציה רציפה לכל $x\neq -5$. ב--5 יש אי רציפות מסוג ראשון.   ג. לא.

15) א. לא.   ב. כן.

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות **1-3** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

1) $x^3+4x-1=0$

2) $x^2=-\ln x$

3) $x^3+bx^2+cx+d=0$

בשאלות **4-5** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

4) $e^x-5x=0$

5) $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

6) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,
בו למשוואה $x^2=10-\frac{1}{x}$ יש פתרון.

7) נגדיר $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$.

א. חשבו את $f(2)$, $f(0)$.

ב. האם ניתן להסיק, לפי משפט ערך הביניים, שלמשוואה $x^2+\frac{1}{x-1}=0$
יש פתרון בקטע $(0,2)$?

8) תהיינה f,g פונקציות רציפות ב-$[a,b]$, המקיימות:
$f(a)<g(a), f(b)>g(b)$.
הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$, שבה $f(c)=g(c)$.

9) נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, שהוא חלקי לתחום הגדרתה.
נניח ש- $f\left([a,b]\right)\subseteq[a,b]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$, כך ש- $f(c)=c$.
נקודה c כנ"ל נקראת "**נקודת שֶׁבֶת**" של הפונקציה.

10) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,1]$, כך ש- $f(c)=c^{1.5}$.

11) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, המקיימת $f(0)=f(1)$.
א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,0.5]$, כך ש- $f(c)=f(c+0.5)$.
ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c,d\in[0,1]$, כך ש- $f(c)=f(d)$.

12) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, המקיימת $f(0)<f(2)<f(1)$.
הוכיחו כי קיימים $c_1,c_2\in[0,2]$, כך ש- $f(c_1)=f(c_2)$.

13) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, המקיימת $f(0)=f(8)$.
הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1,c_2,c_3,c_4\in[0,8]$, כך ש-
$f(c_1)=f(c_2),\ f(c_3)=f(c_4)$.

14) יהיו $0\le a_1,...,a_n\le1$ קבועים המקיימים $a_1+...+a_n=1$.
הוכיחו כי למשוואה $|x-a_1|+...+|x-a_n|=\frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

15) יהי P פולינום ממעלה **זוגית**, מהצורה $P\left(x\right)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$,
ונניח כי $a_0<0$.
הוכיחו כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

16) יהיו f,g פונקציות רציפות המקיימות:
$\lim_{x\to\infty}f(x)=k,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-k,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=-k,\ \lim_{x\to-\infty}g(x)=k$, כאשר $0<k\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x)=g(x)$.

17) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b), ותהיינה $x_1,\dots,x_n$ (כאשר $n>1$) נקודות כלשהן ב-(a,b).

הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (a,b),

כך ש-$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\dots+f(x_n)\right)$.

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b).

האם לכל $c\in(a,b)$, ניתן למצוא נקודות $x_1,\dots,x_n$, שונות זו מזו,

כאשר $n>1$, כך ש-$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\dots+f(x_n)\right)$?

הוכיחו זאת.

תשובות סופיות

6) $[0.1,1]$

7) א. $f(0)=-1$, $f(2)=5$ ב. לא.

שאלות **1-5** ושאלות **8-17** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

שיטת החצייה

שאלות

1) נתונה המשוואה $x^3-2x^2-x+2=0$.
בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2,3]$, מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?

2) נתונה המשוואה $x^3-x-2=0$.
א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.
ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?
ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

תשובות סופיות

1) 0.07

2) א. $[1,2]$ ב. 10 ג. $x=1.520$

תכונות נוספות של פונקציות רציפות – רמה מתקדמת

שאלות

1) קבעו בכל סעיף, האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא:

א. חח״ע, אבל לא מונוטונית.
ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
ד. חסומה, אבל לא רציפה.
ה. רציפה, אבל לא חסומה.
ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי f, היא קטע.

1) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x)>0$, לכל $x\in[a,b]$.
הוכיחו שקיים $\alpha>0$, כך ש- $f(x)\ge\alpha$, לכל $x\in[a,b]$.

2) תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נניח כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ קיים.
הוכיחו ש- f חסומה.

3) תהי $f:[0,1]\to(0,1)$ פונקציה על.
הוכיחו ש- f לא רציפה ב- $[0,1]$.

4) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a,b), ונניח שקיים קבוע ממשי K,
כך שלכל שתי נקודות, x_1 ו- x_2, בקטע (a,b), מתקיים **תנאי ליפשיץ**:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le K|x_1-x_2|$$

הוכיחו כי $f(x)$ רציפה בקטע (a,b).

* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

5) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה c, אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה c.

ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה c, אז $f(x)$ רציפה בנקודה c.

6) הוכיחו: אם f רציפה ב- x_0, אז קיימת סביבה של x_0, בה f חסומה.

תשובות סופיות

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il